THERMODYNAMICS, LARGE DEVIATION AND LANGEVIN EQUATION

THERMODYNAMICS, LARGE DEVIATION AND LANGEVIN EQUATION

九大理　藤坂博一

ブラウン運動から地球大気の運動にわたる広範囲のスケールにおいて観測される確率統計現象の基本的なメカニズムは、力学系カオスが介在していると考えられるが、観測する時空スケールにおいて力学的取扱いより確率過程的取扱いをするのが便利で、本質をとらえていることも多い。すべてを第一原理から導こうとする方法は必ずしもベストとは言い難い。

ブラウン粒子に働く力のように、多くの乱雑力の総和として表される場合は、ガウス過程（線形揺らぎ）でよく近似できるが、少数自由度カオス力学系の揺らぎは線形過程とは程遠い。このような非線形揺らぎを解析するには、キュムラント展開のような摂動展開ではない、無限体の多体相関を非摂動的に取り入れた解析法が必要である。

シンポジウムでは、一つの方法として、大偏差理論を基礎とした、新しい方法と簡単な応用について述べた。

定常時系列を $u\{t\}$ とする。時間的粗視量（局所平均値ともよぶ）を

$$\bar{u}_T = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u\{s\}ds$$

とおくと、$\bar{u}_T$ は $T \to \infty$ で通常の長時間平均値 $\bar{u}_\infty$ に近づくが、大きくはあるが、有限の T に対しては、平均する領域に依存して揺らいでいる。$\bar{u}_T$ の確率分布を $\rho_T(u)$ とおくと、大偏差理論で知られているように、

$$\rho_T(u) \sim e^{-S(u)T}$$

と書けるだろう。揺らぎスペクトル $S(u)$（確率論ではエントロピー関数とよぶ）は、下に凸な関数であり、極少値は長時間平均に対して $S=0$ である。極小値近傍では二次関数であるが、$\bar{u}_\infty$ から離れると二次関数からずれる。特に、種々の相転移点（カオス系、確率過程のモデル）近傍において $S(u)$ の臨界ふるまい（スケーリング則）に系の特徴が表れる。$S(u)$ の決定は統計分布から直接求めるより、特性関数 $M_q(t) =< \exp(qT\bar{u}_T) >\sim \exp(\Phi(q)T)$ を求め、ルジャンドル変換より求めるほうが都合がよい。また、転移点近傍においてエントロピー関数より敏感な関数として

$$u(q) = \lim_{T\to\infty} \frac{< \bar{u}_T \exp(qT\bar{u}_T) >}{M_q(T)} \equiv \lim_{T\to\infty} < \bar{u}_T; q >_T$$

で定義される、重み付き平均値 $u(q)$ やその一回微分 $\chi(q)$（$du(q)/dq$、熱力学の感受率に対応）を考えると揺らぎの特徴をよく記述することができる。

大偏差理論は有限時間の平均値に関するするもので、静的特徴づけといえる。時間変動では同じ平均値を与える微視的運動形態と異なる平均値を与える微視的運動形態は一般に異なる。揺らぎスペクトルはこの相違を記述することができない。これは陽な時間相関に関

係した問題である。運動形態を解析するには、二時間相関関数あるいはフーリエスペクトル強度を用いるが、このような微視的運動形態の相違は通常のスペクトル強度では記述することができず、

$$I_q(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} < | \int_0^T (u\{s\} - u(q)) e^{-i\omega s} ds|^2 ; q >_T$$

で定義されるq次スペクトル強度で明確に抜き出すことが可能である、[1]。これは、平均値が$\bar{u}_T = u(q)$である領域だけを用いて計算したスペクトル強度であり、その時間領域に特徴的な運動形態を抜き出す。一般に、スペクトル強度のピークの位置や幅にq依存性があらわれ、これらは平均値$u(q)$を与える時間変動の特徴的振動数、減衰率である。一般に無限個の特徴的振動数と減衰率が存在する。

これらの統計量は、カオス力学系や、マスター方程式などの基礎方程式が知られているときは、一般化時間演算子の固有値問題を解くことにより得ることができる。

典型的には、秩序だった長いラミナー領域と乱雑な短いバーストが混在する間欠性変動では上のような解析を行うことにより、それぞれの運動形態を分離して取り出すことができる、[2]。図1はタイプI間欠性カオスにおける感受率であり、転移点近傍で有限のqの値q_c(=log 2)で異常に大きくなり、臨界点で発散する。これは$q = q_c$の揺らぎが異常に増大するためであり、同時に相関時間が異常に長くなる。平均値の回り、確率の大きな揺らぎ($q = 0$)には異常性は表れない。図2は$q < q_c$と$q > q_c$に対するスペクトル強度であり、$q < q_c$ではラミナー域の秩序だった運動を、$q > q_c$ではバーストの不規則な運動を明確に分離して記述している。

揺らぎスペクトル、q次スペクトル強度を観測された時系列に対して用いる場合には、Tの有限性、アンサンブルメンバーの有限性の為に、ただちに正常な平均量が得られるとは限らない。精度のいい近似法の開発が望まれる。この為の一ステップとして連分数展開の方法を提案している、[3]。特性関数$M_q(t)$を

$$\frac{d}{dt} M_q(t) = a_q^{(1)} M_q(t) + \int_0^t M_q^{(1)}(t-s) M_q(s) ds$$

に書き直す。$a_q^{(1)}(= \dot{M}_q(0))$は定数である。$M_q^{(1)}(t)$は非平衡統計力学では記憶関数とよばれ、ランジュバン揺動力によって決定されるが、$M_q^{(1)}(t)$もまた同様な式に従う。この操作を続けていくと無限につながった、特性関数に対する微積分方程式が得られ、これらより$M_q(t)$のラプラス変換に対する連分数展開が得られる。揺らぎスペクトルやq次スペクトル強度はこの展開の極で与えられる。係数$a_q^{(1)}, a_q^{(2)}, \cdots$は$M_q^{(1)}, M_q^{(2)}, \cdots$等の観測量で決定されているので、有限極近似により、極が求められる。どの段階で打ち切るかは時系列の特性により一般的な原理はなさそうに思えるが明かではない。連分数展開の方法は、十分多くのデータが得られない場合に有効と考えられる。また、$S(u)$, $I_q(\omega)$が$T\to\infty$の漸近ふるまいによって決まるのに比べ、$a_q^{(1)}, a_q^{(2)}, \cdots$は短時間相関によって決定される。このために、数値的な誤差も小さくおさえられるだろうと期待される。

カオス力学系に話を限ると、緩和時間等の統計性を特徴づける量が系の不安定周期軌道によって決めることができる。統計性を決定するのは、一般化時間発展演算子の固有値であるが、これらは不安定周期軌道によって決定される。図3aは、厳密に解けるある一次元

写像モデルに対する固有値を絶対値の大きな方から20個プロットしたものである。固有値を求めるのに上に述べたと類似の連分数展開が可能で、ｂ，ｃ，ｄはそれぞれ4,6,8極近似で計算したものであり、不安定軌道の周期に直すと8,12,16である。周期の長い軌道を取り込むとより正確な固有値に近づくことがわかる、［４］。

確率統計現象は、一般に多様な側面を持つ。このために解析の仕方によっては一面的な側面しかみず、根底にある正しい法則を理解できないことがある。系の全体的な基本法則を知るには、多様な統計法則を総合的に理解することが必要である。統計現象の多様性は、観測量の時系列の場合は非ガウス性から生ずる。カオス、流体乱流など異なった分野に現れる間欠性は典型的な例である。このような強い非線形性は二体相関関数やそれをベースにしたキュムラント展開などの摂動展開を用いた、伝統的な方法では取り込むことができない。シンポジウムでは観測量の時系列の非摂動的、非ガウス性（非線形性）に対する解析方法について述べた。

狭義の統計力学のテーマの一つは分配関数や輸送係数をミクロからどのように計算するかということであるが、複雑系の研究では、系を明確に特徴づける量や関数はまだ見いだされていない。これは、複雑系の扱う対象が複雑であるというばかりでなく、複雑系の呈する現象が想像を越えて複雑なために、どのような側面を、どの様に解析するかという、問題設定が確立していないことによる。カオスのような少数自由度系でさえも、無限の多様性を持っていた。巨大自由度系としての複雑系の持つ計り知れない《リッチさ》をうまく記述する量、方法を見いだすことが複雑系の研究の基本的なテーマであろう。

参考文献

［１］ H.Fujisaka and H.Shibata, Prog.Theor.Phys. 85(1991)187,
New asymptotic law governing overall temporal correlations in chaotic systems - Ensemble homogenization and order-q power spectrum -.

［２］ W.Just and H.Fujisaka, Physica D 64(1993)98,
Gibbs measures and power spectra for type I intermittent maps.

［３］ H.Fujisaka and M.Inoue, Prog.Theor.Phys.78(1987)1203,
Continued fraction expansion of fluctuation spectrum and generalized time correlation.
W.Just, J.Stat.Phys. 67(1992)271,
Projection operator approach to thermodynamic formalism of dynamical systems.

［４］ H.Fujisaka, H.Shigematsu and B.Eckhardt, Z.Phys.B 92(1993)235,
Continued-fraction expansion of eigenvalues of generalized evolution operators in terms of periodic orbits.

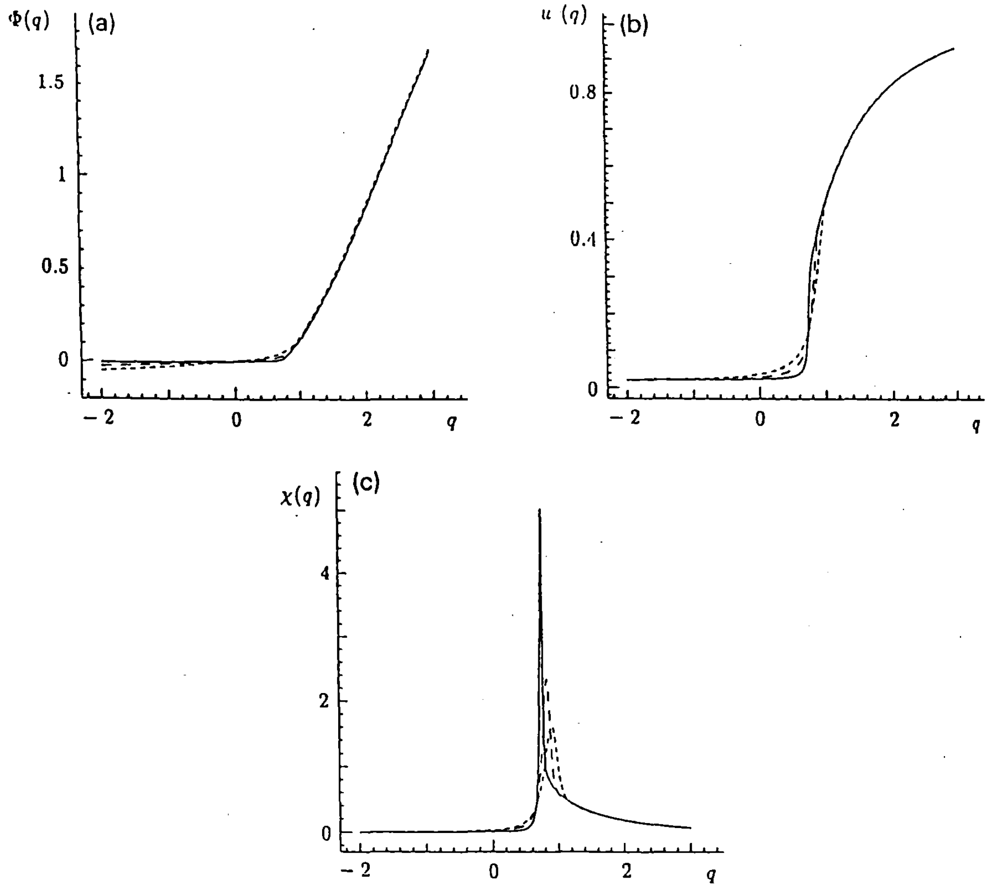

図１　間欠カオスの特性量の転移点近傍のふるまい,（実線，破線，点線の順に転移点に近い. $q_c = log2$ を境にしてラミナーとバーストに対応する明かな相違が見られる

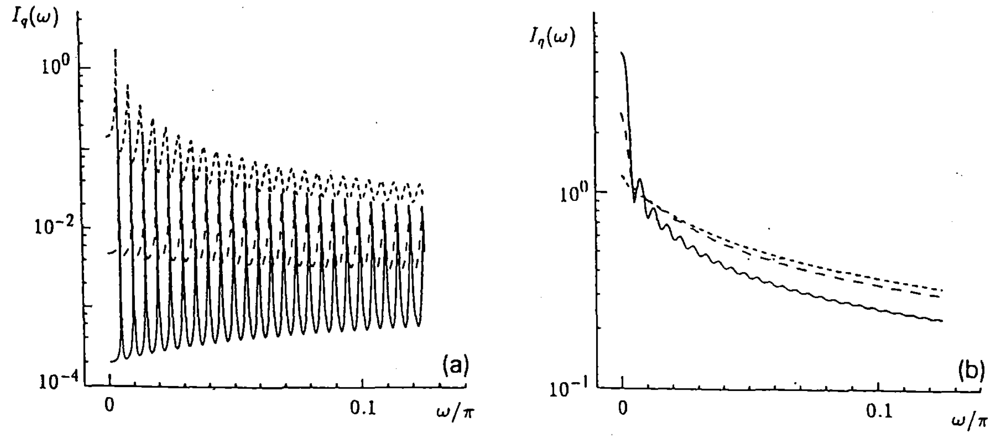

図２　間欠性カオスの転移点近傍におけるq次スペクトル強度. (a) は $q < q_c$ のラミナー相を強調したもの.（実線，破線，点線はそれぞれ，q=-2,0,0.6 を表す. (b) は $q > q_c$ のバースト相を強調したもの,（実線，破線，点線はそれぞれ，q=0.75,0.77,-0.79 を表す

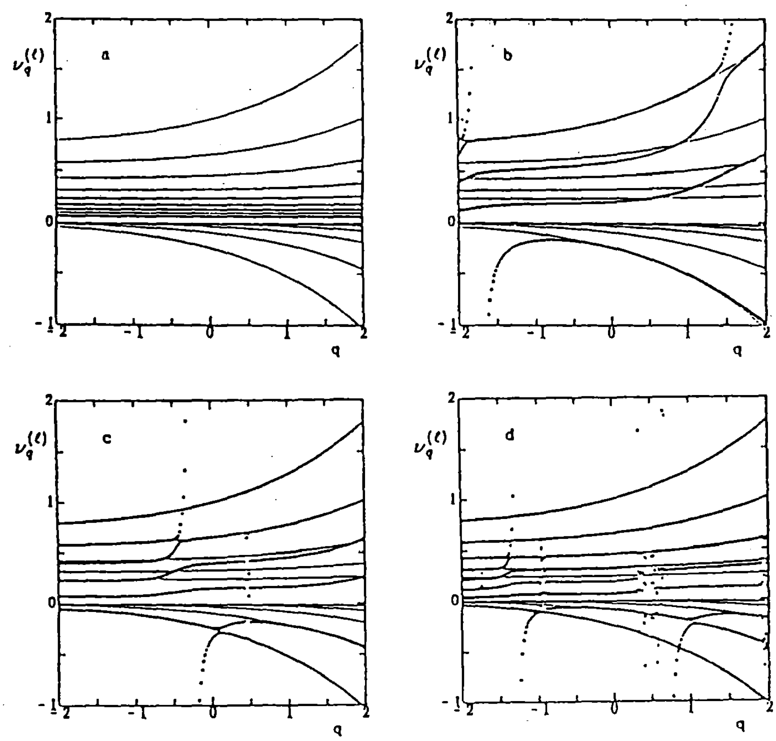

図３　一次元写像モデルの一般化発展演算子の固有地値の厳密解と周期軌道の連分数展開の有限極近似との比較